Universidad de Costa Rica, Facultad de Ciencias Económicas

Escuela de Estadística - Curso: SP-1633 Series Cronológicas

Prof. Shu Wei Chou-Chen

Lista de ejercicios # 4

Un estudio de simulaciones del proceso AR(1)

El objetivo de esta práctica es entender los conceptos de estacionariedad de los modelos autorregresivos de orden 1, AR(1), mediante simulaciones, con el fin de complementar el aprendizaje de los conceptos teóricos vistos en la clase.

PARTE I: Considere el proceso AR(1) que está definido por el siguiente proceso estocástico lineal:

$$Y_t = C + \phi_1 Y_{t-1} + a_t$$

donde C y ϕ_1 son constantes desconocidas, y $a_t \sim wn(0, \sigma_a^2)$. Además, recuerde que el proceso AR(1) es estacionario si $|\phi_1| < 1$.

1. Vamos a definir primero una función para generar un proceso AR(1) con $C = 0$ en donde $a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$, usando el siguiente código:

```
gen_ar1 <- function(N = 150, phi1 = 0.8, sigma2 = 1) {
  a <- rnorm(N,0,sqrt(sigma2))
  y <- as.numeric(0)
  y[1] <- a[1]
  for(i in 2:N){
    y[i] <- phi1*y[i-1]+a[i]
  }
  return(y)
}
```

Ahora le toca a ustedes discutir y explicar en sus palabras el significado de cada línea de códigos.

2. Vamos a generar 10 veces un proceso AR(1) con errores como ruido blanco guassiano de longitud 150 observaciones con $\phi_1 = 0.8$ y $\sigma_a^2 = 1$.

```
realizaciones1 <- replicate(n = 10 ,gen_ar1(N=150,phi1=0.8,sigma2=1), simplify = "array" )
```

3. Ahora en cada una de sus computadoras, grafique estas 10 realizaciones de un AR(1) usando:

```
ts.plot(realizaciones1,col=1:10)
```

Comenten y discutan las características de estas realizaciones en el gráfico.

4. En vez de 10 simulaciones, vamos a generar 500 veces el proceso AR(1) con errores como ruido blanco guassiano de longitud 150 observaciones con $\phi_1 = 0.8$ y $\sigma_a^2 = 1$.

```r
realizaciones2 <- replicate(n = 500 ,gen_ar1(N=150,phi1=0.8,sigma2=1), simplify = "array" )
```

Vamos a calcular la media y la variancia de las 500 realizaciones del proceso usando:

```r
promedios <- apply(realizaciones2,MARGIN=2,mean)
variancias <- apply(realizaciones2,MARGIN=2,var)
```

Recuerde que la media del proceso es $E(Z_t) = C\left(\frac{1}{1-\phi_1}\right) = \mu$ y la variancia es $Var(Y_t) = \left(\frac{1}{1-\phi_1^2}\right)\sigma_a^2$. Haga un análisis exploratorio con las 500 medias y variancias muestrales con medidas descriptivas e histogramas. Compárelos con la media y la variancia teórica del proceso y comente el resultado. ¿La estimación es buena?

5. Extrae las primeras dos realizaciones de los datos generados y calcule la función de autocorrelación muestral y función de autocorrelación parcial muestral.

```r
y1 <- realizaciones2[,1]
y2 <- realizaciones2[,2]
acf(y1)
pacf(y1)
acf(y2)
pacf(y2)
```

Comente los resultados y comparelos con la función de autocorrelación y autocorrelación parcial teórica.

PARTE II: Repita el ejercicio de la PARTE I pero con $\phi_1 = 1$, es decir, el proceso generado no cumple la condición de estacionariedad. Compare los resultados con la parte I.

1. La función ya está definida en PARTE I.
2. Vamos a simular las 10 realizaciones del proceso AR(1) con $C = 0$, $\phi_1 = 1$, y $\sigma_a^2 = 1$.

```r
realizaciones3 <- replicate(n = 10 ,gen_ar1(N=150,phi1=1,sigma2=1), simplify = "array" )
```

3. Grafique estas 10 realizaciones de un AR(1) en donde la condición de estacionariedad no se cumple usando:

```r
ts.plot(realizaciones3,col=1:10)
```

Comenten y discutan las características de estas realizaciones en el gráfico y compárelo con el gráfico del ejercicio 3 de la PARTE I.

4. De la misma forma, vamos a generar 500 veces el proceso AR(1) con errores como ruido blanco guassiano de longitud 150 observaciones con $\phi_1 = 1$ y $\sigma_a^2 = 1$.

```r
realizaciones3 <- replicate(n = 500 ,gen_ar1(N=150,phi1=1,sigma2=1), simplify = "array" )
```

Vamos a calcular la media y la variancia de las 500 realizaciones del proceso usando:

```r
promedios3 <- apply(realizaciones3,MARGIN=2,mean)
variancias3 <- apply(realizaciones3,MARGIN=2,var)
```

Haga un análisis exploratorio con las 500 medias y variancias muestrales con medidas descriptivas y histogramas. Compárelos con la media y la variancia teórica del mismo ejercicio en PARTE I y comente el resultado. ¿Qué está pasando con a estimación?

5. Extrae las primeras dos realizaciones de los datos generados y calcule la función de autocorrelación muestral y función de autocorrelación parcial muestral.

```
y1 <- realizaciones3[,1]
y2 <- realizaciones3[,2]
acf(y1)
pacf(y1)
acf(y2)
pacf(y2)
```

Comente los resultados y compárelos con el mismo ejercicio de la PARTE I. ¿Qué implicaciones creen que tienen la condición de estacionariedad en el proceso generado del proceso AR(1)?

6. Obtenga la serie diferenciada de la serie Y_t definida como

$$\Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}.$$

   Analiace el gráfico lineal de ΔY_t y su a.c.f.

7. Repita los ejercicios 1-6 de la parte II pero con $\phi_1 = 1.3$. Comente los resultados.